

Les mathématiques financières

Objectifs

Gérer ses finances personnelles ou jouer le rôle de conseiller dans ce domaine demande que l'on ait une bonne connaissance des produits financiers et des marchés sur lesquels ils se négocient. On devra aussi être en mesure de comparer différents choix qui s'offrent pour l'atteinte des objectifs de sécurité et de progression financière. Plusieurs décisions impliqueront que l'on ait calculé de façon précise les avantages monétaires qui en découlent. Pour ce faire, le planificateur financier a recours à un ensemble de techniques de calcul que l'on appelle *mathématiques financières* ou *mathématiques de l'intérêt*. Celles-là font l'objet du présent texte. De façon particulière, après sa lecture, vous pourrez :

1. calculer la valeur capitalisée ou future d'un montant fixe ou d'une série de versements en utilisant le multiplicateur d'une table conçue à cet effet ou une formule appropriée;
2. calculer la valeur actualisée ou présente d'un montant fixe ou d'une série de versements en utilisant le multiplicateur d'une table conçue à cet effet ou une formule appropriée;
3. expliquer comment résoudre des problèmes de mathématiques financières en ayant recours à des outils tels le calculateur financier et le chiffrier électronique;
4. utiliser la technique de l'approximation d'un taux à l'aide de la méthode de l'interpolation, à partir des multiplicateurs tirés d'une table d'intérêt;
5. résoudre des problèmes comprenant des annuités de début de période à l'aide d'une table fournissant les facteurs d'intérêt pour des annuités de fin de période;
6. appliquer les notions de mathématiques financières à la solution de divers problèmes liés à la gestion des finances personnelles.

Une bonne familiarité avec les mathématiques financières se révèle un précieux atout pour qui veut gérer ses finances personnelles ou conseiller d'autres personnes dans ce domaine. En effet, on peut mettre ces connaissances en pratique dans presque tous les aspects de la planification financière, qu'il s'agisse de l'analyse de produits financiers visant l'atteinte de la sécurité financière, tels les assurances et les régimes d'épargne-retraite, de l'évaluation de placements en titres à taux fixe, de l'analyse d'actions ordinaires et de placements immobiliers ou, enfin, d'un choix entre différentes options de stratégies fiscales.

1. La notion d'intérêt

Le dictionnaire *Larousse* donne différentes significations pour le mot intérêt, dont celle-ci, qui correspond à son utilisation habituelle dans les domaines liés à la gestion des finances personnelles :

«Somme que le débiteur paie au créancier pour de l'argent prêté.»

Les mathématiques financières permettent de calculer différentes valeurs s'appliquant à une situation où un intérêt est encaissé ou payé, par exemple :

- le montant de l'intérêt à payer sur un prêt personnel;
- le montant d'intérêt gagné sur un placement à taux fixe, au cours d'une période donnée;
- le montant à épargner pour engendrer un montant recherché à une échéance donnée;
- le nombre de périodes pendant lesquelles un emprunt devra être remboursé, si l'on suppose un remboursement d'une somme de $X\$$ et un taux d'intérêt de $Y\%$.

Non seulement les mathématiques de l'intérêt s'appliquent-elles à toutes les situations comprenant le paiement ou la réception d'un intérêt au sens strict, mais elles sont également utilisées pour calculer le taux de rendement dans des situations où on ne trouve pas d'intérêt, selon la définition que nous en avons donnée. En effet, les techniques que nous verrons sous peu permettent aussi de calculer le rendement annuel moyen d'un investissement en actions, dont les retombées pécuniaires se manifesteront sous forme de dividende et de gain en capital. On pourra également les utiliser pour calculer le rendement d'un investissement dans l'immobilier.

A. Intérêt simple et intérêt composé

Dans notre système économique, le capital est considéré comme un facteur de production primordial pour le bon fonctionnement des entreprises et des autres agents économiques. Cette contribution est rémunérée à juste titre par le versement régulier et périodique d'intérêt ou d'autres formes de paiements (dividendes, loyers, etc.). Les revenus d'intérêts que touche un prêteur à la fin d'une période peuvent être prêtés ou placés à leur tour, augmentant du fait même le capital-prêt de l'investisseur, et, d'une période à l'autre, le montant d'intérêt global que touche un prêteur ou un investisseur. Ce phénomène par lequel un

capital initial est augmenté des revenus d'intérêts de chaque période, ce qui permet de gagner au cours des périodes suivantes des intérêts sur l'intérêt des périodes précédentes en plus d'en retirer sur le capital initial, s'appelle la composition de l'intérêt ou, plus communément, l'intérêt composé. Il décrit la conception que l'on se fait aujourd'hui de l'intérêt dans la presque totalité des situations qui le concernent. L'exemple 1.1 illustre une application du concept d'intérêt composé pour un placement à taux fixe.

Exemple 1.1

M. Caron a investi 5 000\$ dans un certificat de placement garanti «à intérêt composé» offert par une société de fiducie exploitant une succursale dans la localité où il réside. Ce placement comporte un taux d'intérêt de 8%, calculé annuellement. L'appellation «à intérêt composé» signifie que l'intérêt annuel ne sera pas versé à M. Caron mais qu'il s'ajoutera plutôt au capital pour rapporter un intérêt supérieur au cours des périodes suivantes. À l'échéance du placement, le fiduciaire remboursera le capital initial et paiera tous les intérêts gagnés. Le tableau ci-après illustre l'évolution du revenu d'intérêt et du capital accumulé de M. Caron au cours de la durée du placement.

Moment/période	Intérêt gagné au cours de la période	Capital accumulé à la fin de la période	Intérêt cumulatif
début du placement (temps 0)	0,00\$	5 000,00\$	0,00\$
1 ^{re} année (période 1)	400,00\$	5 400,00\$	400,00\$
2 ^e année (période 2)	432,00\$	5 832,00\$	832,00\$
3 ^e année (période 3)	466,56\$	6 298,56\$	1 298,56\$
4 ^e année (période 4)	503,88\$	6 802,44\$	1 802,44\$
5 ^e année (période 5)	544,20\$	7 346,64\$	2 346,64\$

Comme on le constate, le montant d'intérêt gagné par M. Caron augmente d'année en année, puisque le fiduciaire calcule l'intérêt non pas sur le capital initial de 5 000\$, mais sur le capital accumulé au début de la période. Ainsi, l'intérêt applicable à la 3^e période s'obtient en multipliant le taux d'intérêt, 8%, par le capital accumulé à la fin de la 2^e période, 5 832,00\$, ce qui donne $8\% \times 5\,832,00\ \$$, soit 466,56 \$.

L'exemple qui précède illustre une situation où l'émetteur d'un placement prend à sa charge la composition de l'intérêt en ajoutant les montants d'intérêt gagnés périodiquement au capital déjà accumulé et en versant, pour la période

suivante, de l'intérêt sur le montant de capital résultant de cette addition. Bien qu'un tel exemple illustre parfaitement ce qu'est l'intérêt composé, notons qu'il n'est pas nécessaire que l'émetteur d'un placement assure le réinvestissement d'un revenu pour que le concept d'intérêt composé s'applique. En effet, si M. Caron détenait un certificat de placement à intérêt régulier grâce auquel il percevrait un montant annuel d'intérêt de 400\$¹ que lui verserait le fiduciaire, il aurait le loisir de placer de nouveau chaque paiement d'intérêt dans des produits financiers distincts, bénéficiant ainsi de la composition de l'intérêt sur les revenus d'intérêts produits par son capital initial.

Par opposition à l'intérêt composé, on décrit l'intérêt simple comme un intérêt payé ou perçu, à l'échéance d'un contrat de prêt ou de placement, et calculé, pour chaque période, sur le capital initial non augmenté des intérêts des périodes précédentes. Étant donné que l'intérêt n'est ni versé à la fin de chaque période ni ajouté au capital initial aux fins du calcul de l'intérêt applicable aux périodes suivantes, il n'y a pas, dans un tel cas, composition de l'intérêt. Les différentes législations régissant le fonctionnement des institutions financières de même que les lois protégeant le consommateur ont pratiquement fait disparaître l'intérêt simple du domaine des finances personnelles.

Les techniques de mathématiques financières présentées dans cette leçon s'appliquent strictement aux situations comprenant l'intérêt composé.

B. Intérêt périodique, intérêt nominal et intérêt effectif

Bien que, comme nous venons de l'expliquer, les contrats de placement et les contrats de prêt en vigueur au Canada prévoient le calcul et l'attribution de l'intérêt de façon périodique, ce qui permet la composition de l'intérêt ou l'intérêt composé, il existe différentes façons de se référer au taux d'intérêt d'un même contrat. On distingue, en effet, le taux d'intérêt périodique, le taux d'intérêt nominal et le taux d'intérêt effectif d'un placement. Dans le cas où l'intérêt est calculé et accordé au propriétaire du capital une fois par année, ces trois taux seront identiques. Par contre, si la période de référence pour le calcul de l'intérêt est de moins de 1 an, par exemple mensuelle, trimestrielle ou semestrielle, ces trois taux seront de valeurs différentes.

i) Le taux périodique d'un placement ou d'un emprunt

Le taux périodique est le taux utilisé à chaque période de calcul d'intérêt pour déterminer l'intérêt sur un emprunt ou sur un placement. Par exemple, si un certificat de placement de 1 000\$ offre à son détenteur la possibilité de retirer un intérêt semestriel de 40\$, le taux périodique de ce placement est de 4%, soit $4\% \times 1\,000\ \$$. Mentionnons qu'on désigne la période retenue pour le calcul de l'intérêt par la période de capitalisation ou composition de l'intérêt.

¹. Soit $8\% \times 5\,000,00\ \$$.

ii) Le taux nominal d'un prêt ou d'un placement

Le taux nominal d'un placement est simplement le taux obtenu en multipliant son taux périodique par le nombre de périodes de capitalisation dans une année. Si nous poursuivons l'exemple qui vient d'être évoqué, le taux nominal d'un certificat de placement rapportant un intérêt semestriel de 4% est 8%, soit $4\% \times 2$.

Indépendamment de la période de capitalisation utilisée pour un placement ou un emprunt, les institutions financières tout comme les investisseurs se réfèrent souvent au taux d'un emprunt ou d'un placement en utilisant un taux annuel, parce qu'un tel taux permet plus facilement la comparaison avec d'autres instruments financiers à un moment quelconque. Par exemple, si vous voulez faire un emprunt hypothécaire, vous vous informerez des taux d'intérêt annuels demandés par les prêteurs et non pas du taux périodique demandé, qui correspondrait dans ce cas à un taux semestriel.

iii) Le taux d'intérêt effectif d'un prêt ou d'un placement

Préféreriez-vous détenir le placement A, qui vous rapporterait un intérêt de 2% par trimestre, ou le placement B, qui vous permettrait de retirer un versement d'intérêt annuel de 8%? Vous pouvez facilement calculer que le taux nominal des deux placements est le même:

Placement	Taux périodique	Nombre de versements d'intérêt par année	Taux nominal ^a
A	2%	4	8%
B	8%	1	8%

a. Taux périodique multiplié par le nombre de versements par année.

Si vous avez parfaitement saisi le concept d'intérêt composé qui a été exposé précédemment, vous n'aurez aucune hésitation devant un tel choix. Vous savez qu'en percevant un versement d'intérêt chaque trimestre, vous pourrez réinvestir plus rapidement vos revenus d'intérêts, ce qui se traduira par un revenu global d'intérêt supérieur. Le placement A est donc plus avantageux. On peut en conséquence énoncer comme principe financier qu'à taux nominal égal, on préférera le placement dont la période de composition est la plus courte.

Pour établir une comparaison rapide entre les taux d'intérêt applicables à différents contrats de placement ou de prêt, il est donc nécessaire de disposer d'un taux d'intérêt qui nous renseigne sur le taux annuel véritable de tels contrats en tenant compte de la composition d'intérêt qui intervient dans les cas où il y a plus d'une période de composition par année. Ce taux d'intérêt est appelé le taux effectif ou encore le taux réel d'un placement. Les méthodes de calcul présentées dans les prochaines sections vous permettront d'apprendre à calculer le taux effectif d'un placement ou d'un prêt. Considérons pour le moment le tableau 13.1, qui donne les taux effectifs pour des taux nominaux de 7% à 10% se-

lon différentes périodes de capitalisation. On peut y constater, par exemple,

TABLEAU 13.1

TAUX EFFECTIFS CORRESPONDANT À DES TAUX NOMINAUX DE 7% À 10%
POUR DIFFÉRENTES PÉRIODES DE CAPITALISATION

Période de capitalisation	Nombre de périodes par année	Taux nominaux			
		7%	8%	9%	10%
<i>Année</i>	1	7,00%	8,00%	9,00%	10,00%
<i>Semestre</i>	2	7,12%	8,16%	9,20%	10,25%
<i>Trimestre</i>	4	7,19%	8,24%	9,31%	10,38%
<i>Deux mois</i>	6	7,21%	8,27%	9,34%	10,43%
<i>Mois</i>	12	7,23%	8,30%	9,38%	10,47%

qu'un placement offrant un taux nominal de 8% avec versements d'intérêt trimestriels rapporte un taux effectif d'environ 1/4 de 1% de plus que le placement offrant le même taux nominal, mais avec un seul versement d'intérêt par année. Une telle différence peut sembler minime, mais, si l'on considère des contrats de prêts et des placements substantiels comme un emprunt hypothécaire et un régime d'épargne-retraite, elle se traduit par une augmentation de revenus ou des dépenses accrues qui se calcule en milliers de dollars!

2. La capitalisation et l'actualisation des flux financiers

Dans un environnement financier où la composition de l'intérêt est la règle, il y a essentiellement deux types de calculs que désirera faire le gestionnaire de portefeuille:

1. le calcul de la valeur à une date future de montants épargnés (ou empruntés) à un taux d'intérêt donné;
2. le calcul du montant requis au moment présent pour engendrer un montant désiré à une date future, si l'on suppose un taux d'intérêt précis.

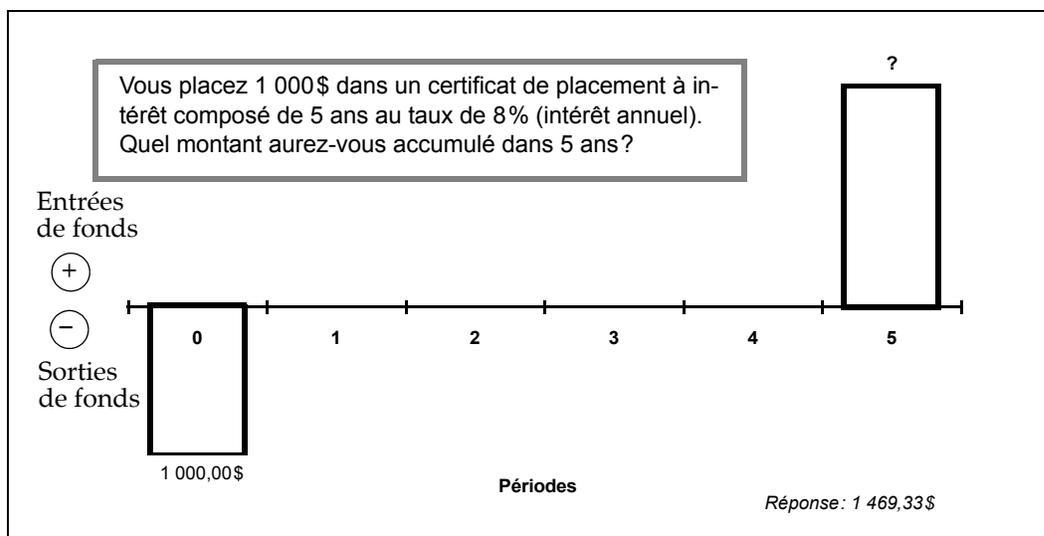
On appelle ces calculs la capitalisation et l'actualisation des flux financiers.

i) La capitalisation des flux financiers

Si vous déposez aujourd'hui 1 000\$ dans un certificat de placement «à intérêt composé» rapportant un intérêt annuel de 8%, calculé une fois l'an, quel sera le montant accumulé à l'échéance du certificat dans cinq ans? Puisque ce certificat est à intérêt composé, les intérêts seront ajoutés au capital lorsqu'ils seront dus, mais le détenteur ne récupérera capital et intérêt qu'à l'échéance du certificat après cinq ans. Le schéma 13.1 illustre la situation qui vient d'être décrite. Les

SCHÉMA 13.1

ILLUSTRATION DE LA CAPITALISATION D'UN FLUX FINANCIER



techniques de mathématiques financières nous permettront de calculer que la somme recherchée est 1 469,33\$².

ii) L'actualisation des flux financiers

Plutôt que de se demander ce que vaudront des épargnes à une date future compte tenu des intérêts produits, il arrive fréquemment que l'on pose le problème à l'inverse. Par exemple, je pourrais me demander quel montant je dois épargner maintenant pour disposer dans trois ans d'une somme de 5 000\$ qui m'offrira la possibilité de réaliser un projet qui me tient à cœur, si l'on suppose de nouveau que le taux d'intérêt en vigueur actuellement (et celui auquel on pourra réinvestir le revenu d'intérêts gagnés sur l'épargne) est de 8%. On appelle cette façon de poser le problème l'actualisation des flux financiers. Le schéma 13.2 illustre le problème d'actualisation qui vient d'être décrit. À l'aide de différentes méthodes qui seront présentées dans la suite de cette leçon, vous apprendrez comment il est possible de calculer que le dépôt d'une somme de 3969,16\$³ vous permettra d'atteindre l'objectif visé.

3. Calculs financiers comprenant un montant unique

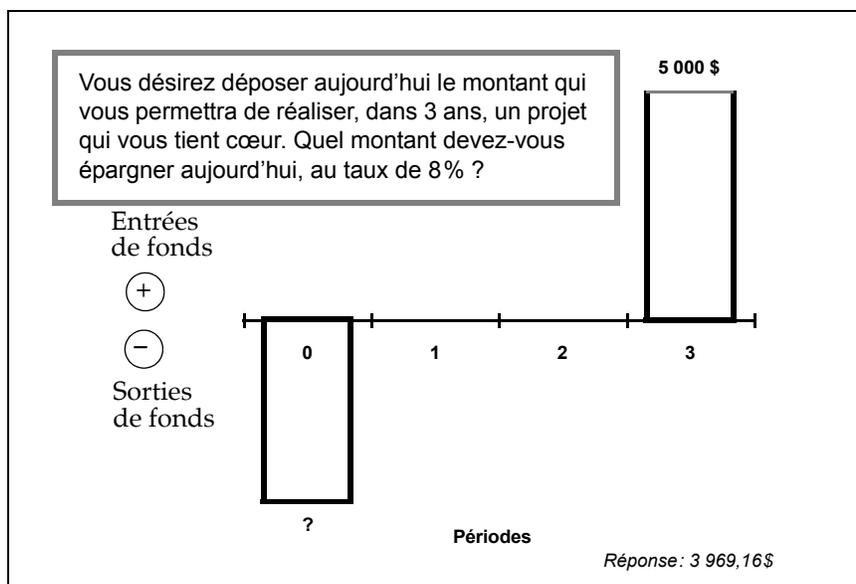
Plusieurs problèmes de mathématiques financières comprennent un montant unique qu'il s'agit de capitaliser ou d'actualiser. Les deux exemples qui ont été

². Ce calcul est expliqué à la section 3 du présent chapitre.

³. Ce calcul est expliqué à la section 3 du présent chapitre.

SCHÉMA 13.2

ILLUSTRATION DE L'ACTUALISATION D'UN FLUX FINANCIER



donnés à la section précédente décrivent ce genre de situation (voir schémas 13.1 et 13.2). Voici d'autres exemples:

- un investissement en actions qui augmente ou perd de la valeur au fil des ans (si l'on ne considère pas les dividendes);
- la détermination du taux de croissance requis dans la valeur d'un immeuble pour qu'il soit possible de le revendre à un prix donné après un certain nombre d'années.

Voyons d'abord comment se calcule la valeur future d'un montant unique.

A. Calcul de la valeur future d'un montant unique

Vous placez 1 000\$ dans un certificat de placement à intérêt composé de 5 ans au taux de 8% (intérêt annuel). Quel montant aurez-vous accumulé dans 5 ans? Pour résoudre ce problème et ceux que nous verrons par la suite, voyons la notation particulière qui sera utilisée pour se référer à certains termes:

P_0 = principal ou valeur actuelle au temps 0

i = taux d'intérêt ou rendement (en %)

n = nombre de périodes

I = montant des intérêts gagnés (en \$)

P_n = valeur future ou accumulée au bout de n périodes

S'il s'agissait de calculer la valeur finale d'un certificat de 1 000\$ dont la durée ne serait que de 1 an et qui offrirait aussi un taux d'intérêt de 8%, nous pourrions calculer P_1 à l'aide de la formule suivante:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + I \\ &= P_0 + (P_0 \times i) \\ &= P_0 \times (1 + i) \end{aligned} \tag{EQ 1}$$

Ce qui nous donnerait 1 080\$, soit $1\,000 \$ \times (1 + 0,08)$.

De l'équation 1, nous pouvons déduire que la formule qui permettra de calculer la valeur d'un certificat «à intérêt composé» dont la durée serait de 2 ans est:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + I \\ &= P_1 + (P_1 \times i) = P_1(1 + i) \\ &= (P_0(1 + i))(1 + i) = P_0(1 + i)^2 \end{aligned} \tag{EQ 2}$$

Ce qui permet de généraliser ainsi pour une durée égale à n périodes:

$$P_n = P_0(1 + i)^n \tag{EQ 3}$$

Il nous est donc possible de calculer facilement la valeur future d'un certificat de placement de 1 000\$ à 8% après 5ans. Cette valeur est de 1 469,33\$, soit:

$$1\,000 \$ \times (1 + 0,08)^5$$

Bien qu'il soit relativement facile de calculer des valeurs futures à l'aide d'une calculatrice, plusieurs habitués des calculs financiers préfèrent recourir à des tables qui fournissent les multiplicateurs ou facteurs d'intérêt permettant de calculer directement les montants recherchés. On trouve à l'annexe 13.1 une table des facteurs d'intérêt pour le calcul de la valeur future de 1\$. Lorsqu'on a recours à une telle table, on applique la formule suivante:

$$P_n = FI_{VF\ 1\ \$ (n, i)} \times P_0 \tag{EQ 4}$$

où:

$FI_{VF\ 1\ \$ (n, i)}$ = le facteur d'intérêt de la table de la valeur future de 1\$ pour n périodes au taux i .

Puisque le facteur d'intérêt de la valeur future de 1\$ pour 5 périodes à 8% est de 1,4693, il nous est possible de calculer le montant que remboursera l'émetteur du certificat de placement, lequel sera de 1 469,30\$, soit $1,4693 \times 1\,000 \$$.

B. Calcul de la valeur actuelle d'un montant unique

Vous désirez déposer aujourd'hui le montant qui vous offrira la possibilité de réaliser, dans trois ans, un projet qui vous tient à cœur. Quel montant devez-vous épargner aujourd'hui? Contrairement au problème précédent, celui-ci ne nous demande pas ce que vaudra plus tard un montant que l'on épargne (ou emprunte) aujourd'hui. C'est plutôt le contraire qui nous est demandé: combien dois-je mettre en banque aujourd'hui pour disposer d'une somme X dans un certain nombre d'années? En transformant l'équation 3, nous pouvons obtenir la formule de base qui permet le calcul de la valeur actuelle d'un montant unique:

$$P_0 = \frac{P_n}{(1+i)^n} \quad (\text{EQ 5})$$

Nous pouvons donc aisément calculer le montant que nous devons déposer aujourd'hui pour disposer de 5 000\$ dans 3 ans si le taux obtenu sur l'épargne est de 8%. Cette somme est 3 969,16\$, soit:

$$\frac{5\,000 \$}{(1+0,08)^3}$$

Tout comme le calcul de la valeur future d'un montant unique, la valeur actuelle d'un montant unique peut se calculer en ayant recours à un facteur d'intérêt prélevé dans une table. On trouve une telle table à l'annexe 13.2. La formule que l'on utilise est alors:

$$P_0 = FI_{VA\ 1\$ (n, i)} \times P_n \quad (\text{EQ 6})$$

où:

$FI_{VA\ 1\$ (n, i)}$ = le facteur d'intérêt de la table de la valeur actuelle de 1\$ pour n périodes au taux i .

La consultation de l'annexe 13.2 nous apprend que le facteur d'intérêt approprié est 0,7938. Nous pouvons donc calculer la valeur actuelle d'une somme de 5 000\$ que l'on souhaite disposer dans 3 ans et qui est de 3 969\$, soit $0,7938 \times 5\,000 \$$.

4. Calculs financiers comprenant une série de versements, ou annuité

Dans un grand nombre de situations où l'on souhaite évaluer des flux financiers, on est aux prises avec, non pas un montant unique intervenant au début ou à la fin d'un contrat financier, mais avec une série de versements à faire ou à recevoir. À titre d'exemple de telles situations, mentionnons:

- le remboursement d'un prêt hypothécaire;

- des prestations reçues en vertu d'un contrat de rente;
- le dépôt périodique d'un montant fixe assuré à l'intérieur d'un plan d'épargne systématique.

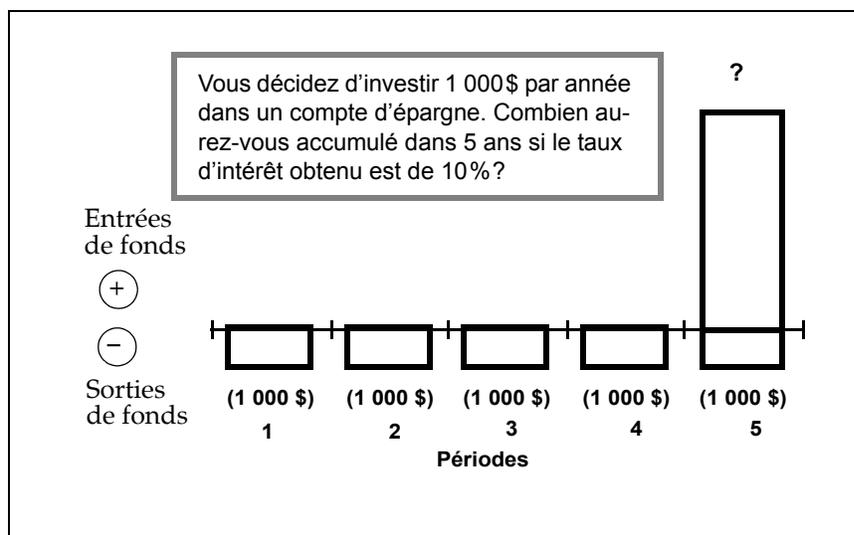
Quoiqu'il soit possible de résoudre de tels problèmes à l'aide des formules et des tables déjà présentées dans cette leçon, cela s'avère rapidement fastidieux; imaginez ce que représente alors le calcul de la valeur actuelle d'une série de 30 remboursements annuels. Heureusement, nous disposons d'outils adaptés aux situations mettant en cause une série de versements à faire ou à recevoir. Avant de regarder de plus près ces outils, notons qu'une telle série est appelée une annuité, terme que nous utiliserons fréquemment dans le reste de ce chapitre.

A. Calcul de la valeur future d'une annuité

Ayant récemment fait l'achat d'un micro-ordinateur, vous anticipez déjà le fait qu'il faudra le remplacer dans quelques années. Vous prenez donc la décision de déposer dans un compte d'épargne réservé à ce projet la somme de 1 000\$ à la fin de chacune des 5 prochaines années (l'année présente comprise). Combien aurez-vous accumulé dans ce compte si le taux d'intérêt que vous êtes en mesure d'obtenir est 10%? Le schéma 13.2 illustre ce problème.

SCHÉMA 13.3

ILLUSTRATION DE LA CAPITALISATION D'UNE ANNUITÉ



Avant de résoudre ce problème particulier, arrêtons-nous au cas général. La valeur future d'une annuité de fin de période⁴ peut être calculée en appliquant la formule suivante, qui n'est qu'une variante de la formule utilisée pour calculer la valeur future d'un montant unique:

$$S_n = A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^{n-2} + \dots + A(1+i)^1 + A(1+i)^0 \quad (\text{EQ 7})$$

où

S_n = la somme des valeurs capitalisées de tous les versements de l'annuité

A = le montant périodique du versement de l'annuité

n, i = respectivement la durée de l'annuité et le taux d'intérêt auquel sont capitalisés les versements.

Puisque cette équation correspond à une série géométrique⁵, il est possible de réduire l'ensemble de l'expression ainsi:

$$S_n = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad (\text{EQ 8})$$

En appliquant la formule à une annuité de 1 000\$ pour une durée de 5 ans à 10%, nous obtenons:

$$S_5 = 1\,000 \$ \left[\frac{(1+0,1)^5 - 1}{0,1} \right] = 1\,000 \$ \left(\frac{1,61 - 1}{0,1} \right) = 6\,105,10 \$$$

Tout comme pour les calculs comprenant des montants uniques, il est également possible de faire des calculs sur les annuités en ayant recours à des facteurs d'intérêt trouvés dans des tables plutôt que d'utiliser la formule que nous venons de voir. La valeur finale de l'annuité est alors obtenue en utilisant le facteur d'intérêt de l'annexe 13.3 et en appliquant la formule suivante:

$$S_n = FI_{VF \text{ annuité } (n, i)} \times A \quad (\text{EQ 9})$$

où:

$FI_{VF \text{ annuité } (n, i)}$ = le facteur d'intérêt d'une table de valeur finale d'une annuité pour une durée de n périodes au taux i .

On peut constater à l'annexe 13.3 que le facteur d'intérêt de la valeur future d'une annuité de 5 périodes à 10% est de 6,1051, ce qui nous permet de calculer une valeur finale de 6 105,10\$ pour une série de 5 dépôts de 1 000\$, soit $6,1051 \times 1\,000 \$$.

⁴. Ce type d'annuité implique que les versements ont lieu à la fin de chaque période. Un autre type d'annuité prévoit des versements de début de période. Le traitement des annuités de début de période sera présenté à la section 5.

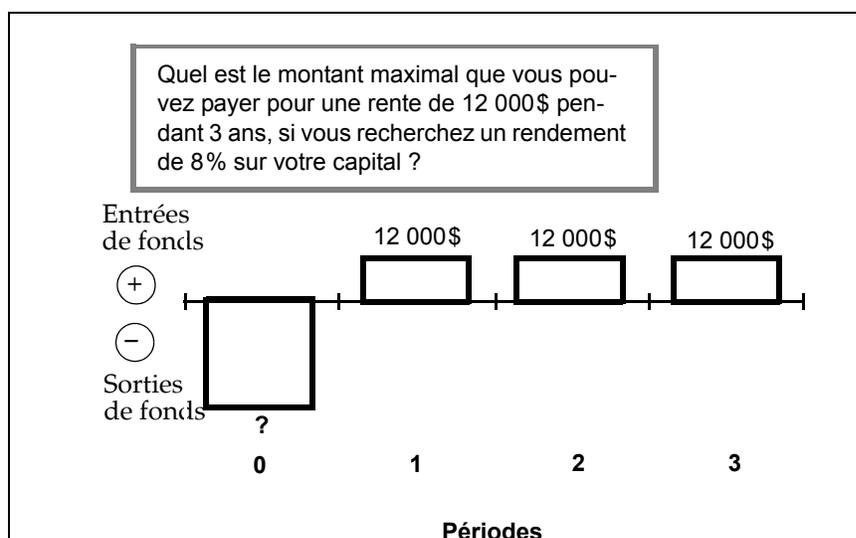
⁵. Une série géométrique est une séquence du type a, ar, ar^2 , etc. On désigne a comme le premier terme de la série et r comme sa raison. Dans le cas qui nous intéresse, on reconnaît une série géométrique (dans l'ordre inverse) dont A est le premier terme et $(1+i)$ la raison. Pour plus de renseignements sur les séries géométriques, on peut consulter *Mathématiques pour les techniques de la gestion* de Paul Lavoie et Michèle Collin, publié chez Gaëtan Morin Éditeur (4^e édition).

B. Calcul de la valeur actuelle d'une annuité

Un contrat de rente temporaire vous permettrait de recevoir un revenu annuel de 12 000\$ pendant les trois années d'un retour aux études projeté. Si vous recherchez un rendement de 8% sur le capital investi dans un tel contrat, quel est le montant maximal que vous pouvez payer pour acquérir cette rente? Le schéma 13.4 illustre cette décision de placement.

SCHÉMA 13.4

ILLUSTRATION DE L'ACTUALISATION D'UNE ANNUITÉ



L'équation 5 peut être adaptée de façon à permettre le calcul de la valeur actuelle d'une annuité:

$$S_0 = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \dots + \frac{A}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A}{(1+i)^n} \quad (\text{EQ 10})$$

Cette série géométrique⁶ peut être réduite à l'expression suivante:

$$S_0 = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \quad (\text{EQ 11})$$

En appliquant cette formule, nous pouvons calculer la valeur actuelle d'une rente de 12 000\$ pendant 3 ans, escomptée à 8%:

$$S_0 = 12\,000 \$ \left[\frac{1 - (1 + 0,08)^{-3}}{0,08} \right] = 12\,000 \$ \left(\frac{1 - 0,79383}{0,08} \right) = 30\,925,50 \$$$

⁶ Il s'agit d'une série géométrique de premier terme $R/(1+i)$ et de raison $1/(1+i)$.

En ayant recours à une table de la valeur actuelle d'une annuité, nous utilisons la formule générale suivante:

$$S_0 = FI_{VA \text{ annuité } (n, i)} \times A \quad (\text{EQ 12})$$

où:

$FI_{VA \text{ annuité } (n, i)}$ = le facteur d'intérêt de la valeur actuelle d'une annuité de n périodes au taux i .

On peut constater dans la table de l'annexe 13.4 que le facteur d'intérêt recherché est de 2,5771, ce qui signifie qu'une annuité de 12 000\$ pendant 3 ans, escomptée à 8%, vaut aujourd'hui 30 925,20\$, soit $2,5771 \times 12\ 000$ \$.

C. Calculs comprenant des annuités de début de période

On appelle une annuité de début de période une série de versements à faire ou à recevoir au début de la période plutôt qu'à la fin, comme cela a été le cas dans les exemples présentés jusqu'ici.

Étant donné que les mathématiques de l'intérêt prennent en considération le moment précis où intervient une entrée ou une sortie de fonds, un problème de capitalisation ou d'actualisation d'une annuité donnera des résultats différents selon que cette annuité sera constituée de versements de début ou de fin de période. De plus, les tables qu'on trouve aux annexes 13.3 et 13.4 s'appliquant pour des annuités de fin de période, on ne peut les utiliser directement avec des annuités de début de période. Cependant, il existe une façon de résoudre un tel problème avec ces tables et nous y reviendrons à la section 5.

5. Autres habiletés en mathématiques financières

Aux deux sections précédentes, nous avons vu les quatre habiletés de base concernant les mathématiques de l'intérêt, soit la capitalisation et l'actualisation respectivement des montants uniques et des annuités. Fort de cet acquis, vous pourrez maintenant vous familiariser avec des applications particulières de ces nouvelles connaissances, qui utilisent tantôt des outils différents des tables et des formules auxquelles nous avons eu recours ou qui proposent une combinaison de différents outils ou connaissances.

A. Résolution des problèmes de mathématiques financières à l'aide d'une calculatrice financière

Une calculatrice financière possède des touches qui correspondent directement aux variables que l'on trouve dans un problème de mathématiques financières. Voici, à titre d'exemple, les touches que l'on trouve sur la première rangée d'une calculatrice Hewlett Packard 14 B:

N
I/Y
PV
PMT
FV

La signification de ces touches est:

- N: le nombre de périodes;
- I/Y: le rendement annuel ou par périodes;
- PV: la valeur actuelle;
- PMT: le montant du versement ou du revenu;
- FV: la valeur finale de l'investissement.

Avec une calculatrice de ce type, il suffit d'entrer les valeurs pour 4 des 5 variables et de demander le calcul de la 5^e variable. Si un problème n'utilise que 4 des 5 variables, tel le calcul de la valeur capitalisée d'un montant unique pour lequel il n'y a pas de versement (PMT), on met la variable superflue égale à 0. Notons que ce choix ne demande pas une saisie particulière de la valeur 0, si l'on prend soin de mettre les registres financiers à 0 avant de commencer un calcul financier. Mentionnons, de plus, qu'une calculatrice financière peut généralement être réglée pour des calculs d'annuités de début de période ou de fin de période. Enfin, la solution de problèmes financiers à l'aide d'une calculatrice requiert que l'on prenne soin de saisir les flux financiers en tenant compte de leur polarisation, c'est-à-dire de leur caractère positif ou négatif.

Pour illustrer l'emploi d'une calculatrice financière, refaisons le dernier problème que nous avons résolu à la question précédente, cette fois à l'aide d'une telle calculatrice. Après avoir opté pour le mode correspondant aux annuités de fin de période et mis à 0 les registres financiers, on saisit les valeurs des trois variables qui constituent les données de ce problème:

- N: 3
- I/Y: 8%
- PMT: 12 000\$ (montant positif, puisqu'il s'agit d'une entrée de fonds)

Il ne reste alors qu'à demander le calcul de la variable PV, pour laquelle la calculatrice nous donne le résultat -30 925,16\$⁷.

Parmi les avantages que présente l'emploi d'une calculatrice financière, mentionnons:

1. la rapidité de calcul;
2. la possibilité de résoudre des problèmes pour une variété quasi infinie de taux d'intérêt et de nombres de périodes; par comparaison, une table n'offre habituellement que quelques taux standard et un éventail restreint de nombres de périodes;
3. la possibilité de résoudre des problèmes plus complexes, tels l'établissement de tableaux d'amortissement de prêt, les calculs comprenant des hypothèques canadiennes, etc.

⁷. On obtient ici une réponse négative parce qu'il s'agit du montant requis pour l'achat d'une rente, soit une sortie de fonds.

B. Résolution de problèmes de mathématiques financières à l'aide du chiffrier électronique

Tous les programmes de type chiffrier électronique, soit Lotus 1-2-3, Excel, Quatro et SuperCalc, disposent de fonctions financières qui permettent de résoudre des problèmes financiers. À titre d'exemple, on trouve au tableau 13.2 les fonctions financières du logiciel Excel qui peuvent être utilisées pour résoudre les exemples et problèmes que l'on trouve dans cette leçon.

L'emploi d'un chiffrier électronique pour faire des calculs financiers présente les mêmes avantages que ceux de la calculatrice financière en ce qui a trait à la rapidité et à la possibilité d'effectuer des calculs complexes avec un nombre quasi illimité de valeurs possibles pour les variables i et n . Le chiffrier offre, de plus, quelques avantages supplémentaires qui sont propres à l'emploi de l'ordinateur, soit la possibilité de conserver les résultats pour usage futur, ce qui inclut la possibilité de les transférer dans des rapports produits à l'aide d'autres logiciels, tel le traitement de texte.

TABLEAU 13.2

ILLUSTRATION DE QUELQUES FONCTIONS FINANCIÈRES DU LOGICIEL EXCEL

Nom de la fonction	Syntaxe et arguments ^a	Description
VC	VC(taux;npm;vpm;va;type)	<ul style="list-style-type: none"> sert à calculer la valeur future ou capitalisée d'un montant unique, d'une annuité ou d'une combinaison des deux.
VA	VA(taux;npm;vpm;vc;type)	<ul style="list-style-type: none"> sert à calculer la valeur actuelle d'un montant unique, d'une annuité ou d'une combinaison des deux.
NPM	NPM(taux;vpm;va;vc;type)	<ul style="list-style-type: none"> sert à calculer le nombre de paiements requis pour faire correspondre la valeur des flux négatifs et des flux positifs au taux d'intérêt spécifié.
TAUX	TAUX(npm;vpm;va;vc;type;estimation)	<ul style="list-style-type: none"> sert à déterminer le taux d'intérêt qui établit une correspondance entre la valeur des flux financiers positifs et celle des flux financiers négatifs compte tenu du moment où ceux-ci se produisent.

a. La signification des arguments est: taux, le taux d'intérêt; npm, le nombre de paiements; va, la valeur d'un montant unique au temps 0; vpm, le montant du versement; vc, la valeur d'un montant unique à la dernière période; type, la valeur distinguant les annuités de début et de fin de période; estimation, le taux suggéré par l'utilisateur pour la recherche du taux exact.

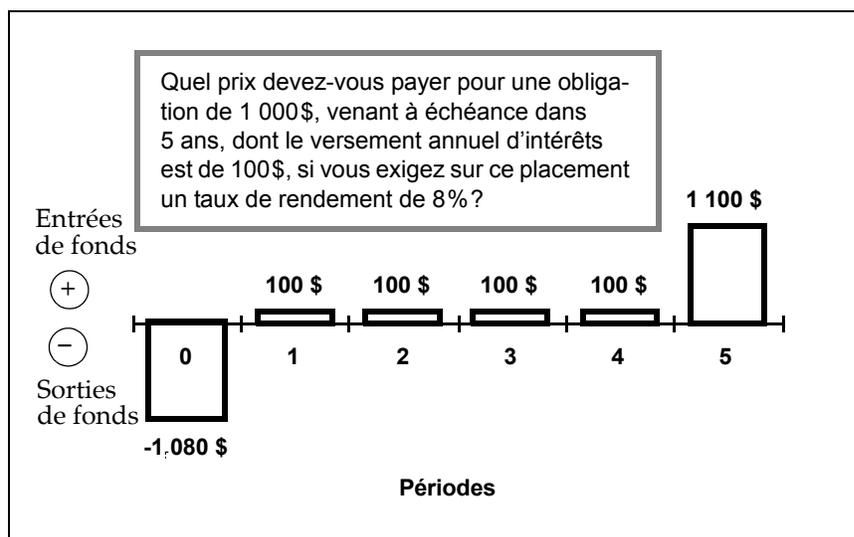
C. Résolution de problèmes comprenant à la fois un montant unique et une annuité à l'aide de tables ou de formules

Vous avez peut-être remarqué que les touches financières d'une calculatrice ou les fonctions financières du chiffrier permettent de traiter à la fois un montant unique déposé ou reçu au temps 0 ou à l'échéance de la dernière période et une série de versements périodiques reçus ou faits entre-temps.

À titre d'exemple d'un tel problème, considérons la situation suivante: quel prix devez-vous payer pour une obligation de 1 000\$, venant à échéance dans 5 ans, dont le versement annuel d'intérêt est de 100\$, si vous exigez sur ce placement un taux de rendement de 8%? Le schéma 13.5 illustre ce problème.

SCHÉMA 13.5

ILLUSTRATION DE L'ACTUALISATION D'UNE COMBINAISON COMPORTANT UN MONTANT UNIQUE ET UNE ANNUITÉ



Étant donné qu'un tel problème consiste tout simplement en une combinaison comprenant un montant unique et une annuité, nous pourrions le résoudre à l'aide des facteurs d'intérêt des tables en question. Ainsi V_0 , la valeur de l'obligation au temps 0, peut être calculée de la façon suivante:

$$V_0 = (FI_{VA \text{ annuité } (n, i)} \times A) + (FI_{VA 1 \$ (n, i)} \times P_n) \quad (\text{EQ 13})$$

Ce qui, pour le problème que nous venons d'évoquer, nous permet d'obtenir:

$$V_0 = (3,9927 \times 100 \$) + (0,6806 \times 1\,000 \$) = 399,27 \$ + 680,60 \$ = 1\,079,87 \$$$

D. L'approximation d'un taux à l'aide de la méthode de l'interpolation

Lorsqu'on résout des problèmes de mathématiques financières à l'aide d'une calculatrice ou d'un chiffrier électronique, il est possible d'utiliser n'importe quel taux d'intérêt. Les tables, aussi détaillées soient-elles, présenteront toujours des limitations à ce sujet. On peut cependant contourner cette difficulté en ayant recours à une technique d'approximation que l'on appelle l'interpolation d'un taux d'intérêt.

Pour démontrer cette approche, considérons le problème suivant, qui représente une variante d'un problème que nous avons résolu précédemment. Supposons que M^{me} St-Pierre ait la possibilité de se procurer pour 30 500\$ une rente temporaire qui lui assurerait un revenu annuel de 12 000\$ au cours des trois prochaines années, quel taux de rendement obtient-elle sur son épargne? Puisque nous savons qu'un prix de 30 926\$ correspondrait à un taux de 8%, calculons la valeur de la rente avec un taux d'actualisation de 9%.

$$S_0 = FI_{VA \text{ annuité } (n, i)} \times A = 2,5313 \times 12\,000 \$ = 30\,375,60 \$$$

Puisqu'un taux de 8% correspond à un prix de 30 926\$ et un taux de 9% à un prix de 30 376\$, nous pouvons conclure que le taux recherché se trouve entre ces deux taux. Pour obtenir une approximation du taux recherché, calculons d'abord la différence entre les deux prix que nous avons établis:

$$30\,926 \$ - 30\,376 \$ = 550 \$$$

puis la différence entre le prix auquel M^{me} St-Pierre peut obtenir la rente et le prix correspondant au taux le plus bas que nous avons utilisé:

$$30\,926 \$ - 30\,500 \$ = 426 \$$$

Calculons maintenant le rapport entre la seconde différence et la première:

$$426 \$ / 550 \$ = 0,77$$

Enfin, nous calculerons le taux approximatif en additionnant au taux le plus bas que nous avons utilisé, soit 8%, le produit obtenu en multipliant le rapport des différences que nous venons de calculer par la différence entre les deux taux qui ont été employés, soit 1%⁸. Ce dernier calcul nous permet d'obtenir:

$$8 \% + (0,77 \times 1 \%) = 8,77 \%$$

Bien que cette méthode soit dite approximative, ce qui signifie qu'elle peut donner un taux qui s'écarte de quelques centièmes du véritable taux, dans ce cas-ci une vérification à l'aide d'une calculatrice financière ou d'un chiffrier électro-

⁸. 9% - 8%

nique vous offrira la possibilité de constater que le taux de rendement exact de M^{me} St-Pierre est bel et bien 8,77%.

E. Résolution de problèmes comprenant une annuité de début de période avec une table d'annuités de fin de période

La plupart des manuels qui fournissent des tables de mathématiques financières ne contiennent généralement que des tables s'appliquant à des annuités de fin de période. Il est néanmoins possible de résoudre un problème de capitalisation ou d'actualisation d'une annuité de début de période avec une telle table. Voyons comment il faudra procéder dans chaque cas.

i) Capitalisation d'une annuité de début de période

Avant d'indiquer la marche à suivre pour une annuité de début de période, analysons ce qu'est la capitalisation d'une annuité de fin de période. L'annuité de fin de période implique qu'il n'y a aucune capitalisation qui intervient au cours de la première période et que le dernier versement ne produit aucun intérêt, puisqu'il est fait le jour même où le contrat financier vient à échéance. Par comparaison, l'annuité de début de période prévoit que chaque versement fait bénéficier d'une période de capitalisation supplémentaire. On pourra donc résoudre une annuité de début de période en utilisant le facteur d'intérêt applicable à une annuité dont la durée est supérieure de un an à la véritable durée et en retranchant la valeur 1 du facteur d'intérêt correspondant.

ii) Actualisation d'une annuité de début de période

À nouveau, analysons l'annuité de fin de période pour voir de quelle façon son facteur d'intérêt peut être adapté pour le cas des annuités de début de période. Lorsqu'on actualise une annuité de fin de période, chaque versement doit être actualisé pour un nombre de périodes correspondant à son rang dans la série de versements: le premier versement pour une période, le deuxième pour deux, le $n^{\text{ième}}$ pour n . Par comparaison, avec une annuité de début de période, le premier versement n'est pas actualisé, puisqu'il intervient au temps 0^9 . En fait, une telle annuité peut être traitée à l'aide du facteur d'intérêt correspondant à une annuité de fin de période d'une durée inférieure d'une période auquel on ajoutera la valeur 1 pour tenir compte du premier versement.

Le tableau 13.3 établit une comparaison entre les annuités de début de période et celles de fin de période.

⁹. Il est également possible de considérer qu'il est actualisé avec un facteur d'intérêt de 1.

TABEAU 13.3 ACTUALISATION ET CAPITALISATION DES ANNUITÉS DE DÉBUT ET DE FIN DE PÉRIODE

Actualisation d'une annuité de 3 versements de 1 000\$ à 8%				Capitalisation d'une annuité de 3 versements de 1 000\$ à 8%			
fin de période		début de période		fin de période		début de période	
facteur	valeur	facteur	valeur	facteur	valeur	facteur	valeur
2,5771	2 577,10\$	2,7833	2 783,30\$	3,2464	3 246,60\$	3,5061	3 506,10\$
Calcul d'un facteur d'intérêt pour l'actualisation d'une annuité de début de période				Calcul d'un facteur d'intérêt pour la capitalisation d'une annuité de début de période			
FI $_{VA(2, 8\%)} - \text{fin de période}$			1,7833	FI $_{VF(4, 8\%)} - \text{fin de période}$			4,5061
Plus: facteur de correction pour P1			1,0000	Moins: facteur de correction pour P4			1,0000
Égale: FI $_{VA(3, 8\%)} - \text{début de période}$			2,7833	Égale: FI $_{VF(3, 8\%)} - \text{début de période}$			3,5061

ANNEXE 13.1 VALEUR FUTURE D'UN MONTANT UNIQUE DE 1 \$

n	taux de capitalisation																													
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	14%	16%	18%	20%	25%	30%													
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000	1,1200	1,1400	1,1600	1,1800	1,2000	1,2500	1,3000													
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100	1,2544	1,2996	1,3456	1,3924	1,4400	1,5625	1,6900													
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310	1,4049	1,4815	1,5609	1,6430	1,7280	1,9531	2,1970													
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641	1,5735	1,6890	1,8106	1,9388	2,0736	2,4414	2,8561													
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105	1,7623	1,9254	2,1003	2,2878	2,4883	3,0518	3,7129													
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716	1,9738	2,1950	2,4364	2,6996	2,9860	3,8147	4,8268													
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487	2,2107	2,5023	2,8262	3,1855	3,5832	4,7684	6,2749													
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436	2,4760	2,8526	3,2784	3,7589	4,2998	5,9605	8,1573													
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579	2,7731	3,2519	3,8030	4,4355	5,1598	7,4506	10,6045													
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937	3,1058	3,7072	4,4114	5,2338	6,1917	9,3132	13,7858													
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531	3,4785	4,2262	5,1173	6,1759	7,4301	11,6415	17,9216													
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384	3,8960	4,8179	5,9360	7,2876	8,9161	14,5519	23,2981													
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523	4,3635	5,4924	6,8858	8,5994	10,6993	18,1899	30,2875													
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975	4,8871	6,2613	7,9875	10,1472	12,8392	22,7374	39,3738													
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772	5,4736	7,1379	9,2655	11,9737	15,4070	28,4217	51,1859													
16	1,1726	1,3728	1,6047	1,8730	2,1829	2,5404	2,9522	3,4259	3,9703	4,5950	6,1304	8,1372	10,7480	14,1290	18,4884	35,5271	66,5417													
17	1,1843	1,4002	1,6528	1,9479	2,2920	2,6928	3,1588	3,7000	4,3276	5,0545	6,8660	9,2765	12,4677	16,6722	22,1861	44,4089	86,5042													
18	1,1961	1,4282	1,7024	2,0258	2,4066	2,8543	3,3799	3,9960	4,7171	5,5599	7,6900	10,5752	14,4625	19,6733	26,6233	55,5112	112,4554													
19	1,2081	1,4568	1,7535	2,1068	2,5270	3,0256	3,6165	4,3157	5,1417	6,1159	8,6128	12,0557	16,7765	23,2144	31,9480	69,3889	146,1920													
20	1,2202	1,4859	1,8061	2,1911	2,6533	3,2071	3,8697	4,6610	5,6044	6,7275	9,6463	13,7435	19,4608	27,3930	38,3376	86,7362	190,0496													
25	1,2824	1,6406	2,0938	2,6658	3,3864	4,2919	5,4274	6,8485	8,6231	10,8347	17,0001	26,4619	40,8742	62,6686	95,3962	264,6978	705,6410													
30	1,3478	1,8114	2,4273	3,2434	4,3219	5,7435	7,6123	10,0627	13,2677	17,4494	29,9599	50,9502	85,8499	143,3706	237,3763	807,7936	2 619,9956													

ANNEXE 13.2 VALEUR ACTUELLE D'UN MONTANT UNIQUE DE 1 \$

n	taux d'actualisation																													
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	14%	16%	18%	20%	25%	30%													
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091	0,8929	0,8772	0,8621	0,8475	0,8333	0,8000	0,7692													
2	0,9803	0,9612	0,9426	0,9246	0,9070	0,8900	0,8734	0,8573	0,8417	0,8264	0,7972	0,7695	0,7432	0,7182	0,6944	0,6400	0,5917													
3	0,9706	0,9423	0,9151	0,8890	0,8638	0,8396	0,8163	0,7938	0,7722	0,7513	0,7118	0,6750	0,6407	0,6086	0,5787	0,5120	0,4552													
4	0,9610	0,9238	0,8885	0,8548	0,8227	0,7921	0,7629	0,7350	0,7084	0,6830	0,6355	0,5921	0,5523	0,5158	0,4823	0,4096	0,3501													
5	0,9515	0,9057	0,8626	0,8219	0,7835	0,7473	0,7130	0,6806	0,6499	0,6209	0,5674	0,5194	0,4761	0,4371	0,4019	0,3277	0,2693													
6	0,9420	0,8880	0,8375	0,7903	0,7462	0,7050	0,6663	0,6302	0,5963	0,5645	0,5066	0,4556	0,4104	0,3704	0,3349	0,2621	0,2072													
7	0,9327	0,8706	0,8131	0,7599	0,7107	0,6651	0,6227	0,5835	0,5470	0,5132	0,4523	0,3996	0,3538	0,3139	0,2791	0,2097	0,1594													
8	0,9235	0,8535	0,7894	0,7307	0,6768	0,6274	0,5820	0,5403	0,5019	0,4665	0,4039	0,3506	0,3050	0,2660	0,2326	0,1678	0,1226													
9	0,9143	0,8368	0,7664	0,7026	0,6446	0,5919	0,5439	0,5002	0,4604	0,4241	0,3606	0,3075	0,2630	0,2255	0,1938	0,1342	0,0943													
10	0,9053	0,8203	0,7441	0,6756	0,6139	0,5584	0,5083	0,4632	0,4224	0,3855	0,3220	0,2697	0,2267	0,1911	0,1615	0,1074	0,0725													
11	0,8963	0,8043	0,7224	0,6496	0,5847	0,5268	0,4751	0,4289	0,3875	0,3505	0,2875	0,2366	0,1954	0,1619	0,1346	0,0859	0,0558													
12	0,8874	0,7885	0,7014	0,6246	0,5568	0,4970	0,4440	0,3971	0,3555	0,3186	0,2567	0,2076	0,1685	0,1372	0,1122	0,0687	0,0429													
13	0,8787	0,7730	0,6810	0,6006	0,5303	0,4688	0,4150	0,3677	0,3262	0,2897	0,2292	0,1821	0,1452	0,1163	0,0935	0,0550	0,0330													
14	0,8700	0,7579	0,6611	0,5775	0,5051	0,4423	0,3878	0,3405	0,2992	0,2633	0,2046	0,1597	0,1252	0,0985	0,0779	0,0440	0,0254													
15	0,8613	0,7430	0,6419	0,5553	0,4810	0,4173	0,3624	0,3152	0,2745	0,2394	0,1827	0,1401	0,1079	0,0835	0,0649	0,0352	0,0195													
16	0,8528	0,7284	0,6232	0,5339	0,4581	0,3936	0,3387	0,2919	0,2519	0,2176	0,1631	0,1229	0,0930	0,0708	0,0541	0,0281	0,0150													
17	0,8444	0,7142	0,6050	0,5134	0,4363	0,3714	0,3166	0,2703	0,2311	0,1978	0,1456	0,1078	0,0802	0,0600	0,0451	0,0225	0,0116													
18	0,8360	0,7002	0,5874	0,4936	0,4155	0,3503	0,2959	0,2502	0,2120	0,1799	0,1300	0,0946	0,0691	0,0508	0,0376	0,0180	0,0089													
19	0,8277	0,6864	0,5703	0,4746	0,3957	0,3305	0,2765	0,2317	0,1945	0,1635	0,1161	0,0829	0,0596	0,0431	0,0313	0,0144	0,0068													
20	0,8195	0,6730	0,5537	0,4564	0,3769	0,3118	0,2584	0,2145	0,1784	0,1486	0,1037	0,0728	0,0514	0,0365	0,0261	0,0115	0,0053													
25	0,7798	0,6095	0,4776	0,3751	0,2953	0,2330	0,1842	0,1460	0,1160	0,0923	0,0588	0,0378	0,0245	0,0160	0,0105	0,0038	0,0014													
30	0,7419	0,5521	0,4120	0,3083	0,2314	0,1741	0,1314	0,0994	0,0754	0,0573	0,0334	0,0196	0,0116	0,0070	0,0042	0,0012	0,0004													

ANNEXE 13.3 VALEUR FUTURE D'UNE ANNUITÉ DE 1\$

n	taux de capitalisation																													
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	14%	16%	18%	20%	25%	30%													
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000													
2	2,0100	2,0200	2,0300	2,0400	2,0500	2,0600	2,0700	2,0800	2,0900	2,1000	2,1200	2,1400	2,1600	2,1800	2,2000	2,2500	2,3000													
3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216	3,1525	3,1836	3,2149	3,2464	3,2781	3,3100	3,3744	3,4396	3,5056	3,5724	3,6400	3,8125	3,9900													
4	4,0604	4,1216	4,1836	4,2465	4,3101	4,3746	4,4399	4,5061	4,5731	4,6410	4,7793	4,9211	5,0665	5,2154	5,3680	5,7656	6,1870													
5	5,1010	5,2040	5,3091	5,4163	5,5256	5,6371	5,7507	5,8666	5,9847	6,1051	6,3528	6,6101	6,8771	7,1542	7,4416	8,2070	9,0431													
6	6,1520	6,3081	6,4684	6,6330	6,8019	6,9753	7,1533	7,3359	7,5233	7,7156	8,1152	8,5355	8,9775	9,4420	9,9299	11,2588	12,7560													
7	7,2135	7,4343	7,6625	7,8983	8,1420	8,3938	8,6540	8,9228	9,2004	9,4872	10,0890	10,7305	11,4139	12,1415	12,9159	15,0735	17,5828													
8	8,2857	8,5830	8,8923	9,2142	9,5491	9,8975	10,2598	10,6366	11,0285	11,4359	12,2997	13,2328	14,2401	15,3270	16,4991	19,8419	23,8577													
9	9,3685	9,7546	10,1591	10,5828	11,0266	11,4913	11,9780	12,4876	13,0210	13,5795	14,7757	16,0853	17,5185	19,0859	20,7989	25,8023	32,0150													
10	10,4622	10,9497	11,4639	12,0061	12,5779	13,1808	13,8164	14,4866	15,1929	15,9374	17,5487	19,3373	21,3215	23,5213	25,9587	33,2529	42,6195													
11	11,5668	12,1687	12,8078	13,4864	14,2068	14,9716	15,7836	16,6455	17,5603	18,5312	20,6546	23,0445	25,7329	28,7551	32,1504	42,5661	56,4053													
12	12,6825	13,4121	14,1920	15,0258	15,9171	16,8699	17,8885	18,9771	20,1407	21,3843	24,1331	27,2707	30,8502	34,9311	39,5805	54,2077	74,3270													
13	13,8093	14,6803	15,6178	16,6268	17,7130	18,8821	20,1406	21,4953	22,9534	24,5227	28,0291	32,0887	36,7862	42,2187	48,4966	68,7596	97,6250													
14	14,9474	15,9739	17,0863	18,2919	19,5986	21,0151	22,5505	24,2149	26,0192	27,9750	32,3926	37,5811	43,6720	50,8180	59,1959	86,9495	127,9125													
15	16,0969	17,2934	18,5989	20,0236	21,5786	23,2760	25,1290	27,1521	29,3609	31,7725	37,2797	43,8424	51,6595	60,9653	72,0351	109,6868	167,2863													
16	17,2579	18,6393	20,1569	21,8245	23,6575	25,6725	27,8881	30,3243	33,0034	35,9497	42,7533	50,9804	60,9250	72,9390	87,4421	138,1085	218,4722													
17	18,4304	20,0121	21,7616	23,6975	25,8404	28,2129	30,8402	33,7502	36,9737	40,5447	48,8837	59,1176	71,6730	87,0680	105,9306	173,6357	285,0139													
18	19,6147	21,4123	23,4144	25,6454	28,1324	30,9057	33,9990	37,4502	41,3013	45,5992	55,7497	68,3941	84,1407	103,7403	128,1167	218,0446	371,5180													
19	20,8109	22,8406	25,1169	27,6712	30,5390	33,7600	37,3790	41,4463	46,0185	51,1591	63,4397	78,9692	98,6032	123,4135	154,7400	273,5558	483,9734													
20	22,0190	24,2974	26,8704	29,7781	33,0660	36,7856	40,9955	45,7620	51,1601	57,2750	72,0524	91,0249	115,3797	146,6280	186,6880	342,9447	630,1655													
25	28,2432	32,0303	36,4593	41,6459	47,7271	54,8645	63,2490	73,1059	84,7009	98,3471	133,3339	181,8708	249,2140	342,6035	471,9811	1 054,7912	2 348,8033													
30	34,7849	40,5681	47,5754	56,0849	66,4388	79,0582	94,4608	113,2832	136,3075	164,4940	241,3327	356,7868	530,3117	790,9480	1 181,8816	3 227,1743	8 729,9855													

ANNEXE 13.4 VALEUR ACTUELLE D'UNE ANNUITÉ DE 1\$

n	taux d'actualisation																													
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	12%	14%	16%	18%	20%	25%	30%													
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091	0,8929	0,8772	0,8621	0,8475	0,8333	0,8000	0,7692													
2	1,9704	1,9416	1,9135	1,8861	1,8594	1,8334	1,8080	1,7833	1,7591	1,7355	1,6901	1,6467	1,6052	1,5656	1,5278	1,4400	1,3609													
3	2,9410	2,8839	2,8286	2,7751	2,7232	2,6730	2,6243	2,5771	2,5313	2,4869	2,4018	2,3216	2,2459	2,1743	2,1065	1,9520	1,8161													
4	3,9020	3,8077	3,7171	3,6299	3,5460	3,4651	3,3872	3,3121	3,2397	3,1699	3,0373	2,9137	2,7982	2,6901	2,5887	2,3616	2,1662													
5	4,8534	4,7135	4,5797	4,4518	4,3295	4,2124	4,1002	3,9927	3,8897	3,7908	3,6048	3,4331	3,2743	3,1272	2,9906	2,6893	2,4356													
6	5,7955	5,6014	5,4172	5,2421	5,0757	4,9173	4,7665	4,6229	4,4859	4,3553	4,1114	3,8887	3,6847	3,4976	3,3255	2,9514	2,6427													
7	6,7282	6,4720	6,2303	6,0021	5,7864	5,5824	5,3893	5,2064	5,0330	4,8684	4,5638	4,2883	4,0386	3,8115	3,6046	3,1611	2,8021													
8	7,6517	7,3255	7,0197	6,7327	6,4632	6,2098	5,9713	5,7466	5,5348	5,3349	4,9676	4,6389	4,3436	4,0776	3,8372	3,3289	2,9247													
9	8,5660	8,1622	7,7861	7,4353	7,1078	6,8017	6,5152	6,2469	5,9952	5,7590	5,3282	4,9464	4,6065	4,3030	4,0310	3,4631	3,0190													
10	9,4713	8,9826	8,5302	8,1109	7,7217	7,3601	7,0236	6,7101	6,4177	6,1446	5,6502	5,2161	4,8332	4,4941	4,1925	3,5705	3,0915													
11	10,3676	9,7868	9,2526	8,7605	8,3064	7,8869	7,4987	7,1390	6,8052	6,4951	5,9377	5,4527	5,0286	4,6560	4,3271	3,6564	3,1473													
12	11,2551	10,5753	9,9540	9,3851	8,8633	8,3838	7,9427	7,5361	7,1607	6,8137	6,1944	5,6603	5,1971	4,7932	4,4392	3,7251	3,1903													
13	12,1337	11,3484	10,6350	9,9856	9,3936	8,8527	8,3577	7,9038	7,4869	7,1034	6,4235	5,8424	5,3423	4,9095	4,5327	3,7801	3,2233													
14	13,0037	12,1062	11,2961	10,5631	9,8986	9,2950	8,7455	8,2442	7,7862	7,3667	6,6282	6,0021	5,4675	5,0081	4,6106	3,8241	3,2487													
15	13,8651	12,8493	11,9379	11,1184	10,3797	9,7122	9,1079	8,5595	8,0607	7,6061	6,8109	6,1422	5,5755	5,0916	4,6755	3,8593	3,2682													
16	14,7179	13,5777	12,5611	11,6523	10,8378	10,1059	9,4466	8,8514	8,3126	7,8237	6,9740	6,2651	5,6685	5,1624	4,7296	3,8874	3,2832													
17	15,5623	14,2919	13,1661	12,1657	11,2741	10,4773	9,7632	9,1216	8,5436	8,0216	7,1196	6,3729	5,7487	5,2223	4,7746	3,9099	3,2948													
18	16,3983	14,9920	13,7535	12,6593	11,6896	10,8276	10,0591	9,3719	8,7556	8,2014	7,2497	6,4674	5,8178	5,2732	4,8122	3,9279	3,3037													
19	17,2260	15,6785	14,3238	13,1339	12,0853	11,1581	10,3356	9,6036	8,9501	8,3649	7,3658	6,5504	5,8775	5,3162	4,8435	3,9424	3,3105													
20	18,0456	16,3514	14,8775	13,5903	12,4622	11,4699	10,5940	9,8181	9,1285	8,5136	7,4694	6,6231	5,9288	5,3527	4,8696	3,9539	3,3158													
25	22,0232	19,5235	17,4131	15,6221	14,0939	12,7834	11,6536	10,6748	9,8226	9,0770	7,8431	6,8729	6,0971	5,4669	4,9476	3,9849	3,3286													
30	25,8077	22,3965	19,6004	17,2920	15,3725	13,7648	12,4090	11,2578	10,2737	9,4269	8,0552	7,0027	6,1772	5,5168	4,9789	3,9950	3,3321													